Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 2 - Convergence de séries de fonctions

Rappel théorique. Une **série** de fonctions n'est rien d'autre qu'une suite de sommes partielles. On peut alors parler de la convergence simple, uniforme,... d'une série de fonctions.

Souvenez-vous des résultats suivants. Contrôlez toujours les conditions avant de les appliquer ! On considère des suites et séries de fonctions $X \to Y$ où Y est un espace vectoriel normé.

Théorème 1 (Test de l'intégrale)**.** *Soit* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction monotone. La série de nombres réels* $\sum_{n \leq 1} f(n)$ *converge si et seulement si l'intégrale*

$$\int_1^\infty f(n)\ dn$$

converge.

Remarque. On peut aussi *majorer* $f(n)$ par une fonction intégrable sur $[1, \infty[$ afin de conclure que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.

Définition 1. Une série de fonctions $\sum f_n$ converge **normalement** sur A si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$$

converge. Par l'inégalité triangulaire il suit que la série converge uniformément sur A quand l'espace d'arrivée Y est complet.

Théorème 2 (Critère de Weierstrass)**.** *Une série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* A *si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass, c'est-à-dire s'il existe une suite réelle positive* (M_n) *telle que*

— $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A$: $\|f_n(x)\| \leq M_n$,
— $\sum_n M_n$ *converge.*

Théorème 3 (Transformation d'Abel)**.** *Soit Y un espace de Banach et soient*

- (g_n) *une suite de fonctions $X \to Y$ uniformément borné sur A, c'est-à-dire*
$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \colon \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \right\| \leq M,$$
- (f_n) *une suite de fonctions réelles positives décroissante qui converge uniformément vers 0 sur A.*

Alors la série $\sum_n f_n g_n$ converge uniformément sur A.

Théorème 4 (Convergence des dérivées)**.** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non-vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $A \to \mathbb{R}$ ou $A \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Si*

- *la suite (f_n) converge simplement sur A,*
- *la suite $(\frac{df_n}{dx})$ converge uniformément sur tout compact de A vers une fonction g,*

alors la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de A vers une fonction f. De plus, f est de classe C^1 et
$$\frac{df}{dx}(x) = g(x)$$
pour tout $x \in A$.

Remarque. Il est possible de généraliser la théorème à dimension d.

Définition 2. Soit $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances. Le *rayon* de la série est l'élément
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{1/n}} \in [0, \infty].$$

Théorème 5. *Soit $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ une série de puissances avec rayon R.*

- *si R est fini, la série converge normalement sur $B(x_0, R-\varepsilon]$ pout tout $\varepsilon > 0$,*
- *si R est infini, la série converge normalement sur $B(x_0, R]$ pout tout $R > 0$,*
- *si $y \in \mathcal{C}(x_0, R)$ tel que la série de normbres $\sum_n a_n(y-x_0)^n$ converge, alors la série de fonctions $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément sur le segment reliant x_0 à y.*

Exercice 7. *Montrer que la fonction de Riemann*
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
est C^∞ pour $x > 1$.

Exercice 8. *Etudier la convergence de la série*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Exercice 9. *Sur $[1/2, 1]$, étudier la convergence de la série*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n.$$
Etudier la convergence de la série dérivée ; en déduire que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$